全等三角形的教学策略

◎唐国庆 （江苏省昆山市锦溪中学 215324）

全等三角形从知识结构上来说十分重要，后面要学的线段的垂直平分线、角的平分线、等腰三角形、直角三角形等内容都要通过证明两个三角形全等来加以解决；在学生能力培养上，开始学习运用综合法来证明几何问题，无论是逻辑推理能力，还是分析解决问题的能力，都可在全等三角形的教学中得以培养和提高. 因此，全等三角形的教学对后续学习会有一定影响. 陶行知先生要求我们“教、学、做合一”，对于这样一个重要的章节我们得深入思考，研究全等三角形的教学策略，充分体现出“教、学、做合一”教育思想在数学教学中的指导意义.

策略一：全等三角形要突出“对应”

在全等三角形中，快速准确地找出对应顶点、对应角、对应边是解决全等三角形相关问题的关键，可从三方面入手.

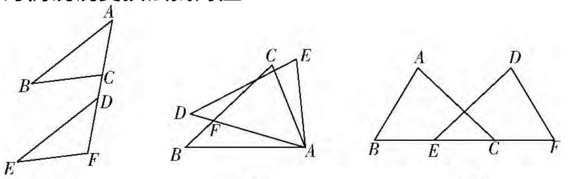
1. 从全等三角形几何语言书写规则入手. 全等三角形用几何语言表示时，通常要求把表示对应顶点的字母书写在对应的位置上. 依据书写规则，对应位置的字母就是对应顶点的字母，对应位置两个字母所表示的线段就是对应线段. 我们不仅要求学生能这样规范地书写几何语言，而且要让学生能从几何语言中快速准确地判断出全等三角形对应顶点、对应角、对应边.

例1 已知$\triangle ABD \cong \triangle CDB$，若$AB=4$，$AD=5$，$BD=6$，$\angle ABD=30°$，则 $CB=$________，$CD=$________，$\angle CDB=$________.

分析 依据全等三角形几何语言书写规则，$\triangle ABD$中A，B，D的对应顶点分别为C，D，B，边AB的对应边是CD，边AD对应边是CB，边BD的对应边是DB，$\angle ABD$的对应角是$\angle CDB$，解答自然就解决了.

2. 直观观察法. 依据全等三角形的性质“全等三角形的对应边相等，对应角相等”，可以得出以下直观判断方法，判断对应顶点、对应角的方法：(1)一对最小的角是对应角，一对最大的角是对应角；(2)有公共角的，公共角是对应角；(3)有对顶角的，对顶角是对应角；(4)对应边所对的角是对应角. 对应角的顶点即为对应顶点. 判定对应边的方法为：(1)一对最短的边是对应边，一对最长的边是对应边；(2)有公共边的，公共边是对应边；(3)对应角所对的边是对应边.

3. 图形变换法. 全等图形都是通过平移、翻折或旋转变换而得到的，全等三角形也不例外，如果我们能依据图形，找出两全等三角形是通过什么变换而得到的，自然就可以快速准确找出对应顶点、对应角、对应边了. 现以下面三幅图为例说说变换法找对应.



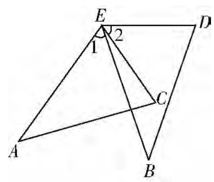
(1) (2) (3)

图(1)是将$\triangle ABC$沿AF向下平移而得到$\triangle DEF$，所以顶点A的对应点是D，顶点B的对应点E，顶点C的对应点是F. 图(2)是$\triangle ABC$绕点A顺时针旋转$\angle BAD$而得到$\triangle ADE$，所以顶点A的对应点是A，顶点B的对应点是D，顶点C的对应点是E. 图(3)是将$\triangle ABC$先左右翻折，再向左平移一定的距离而得到$\triangle DFE$，所以顶点A的对应点是D，顶点B的对应点是F，顶点C的对应点是E. 有了对应点，对应线段和对应角自然就知道了. 理解了全等三角形是怎样变换而来的，我们就能快速准确地找到对应顶点、对应角、对应边了.

策略二 “学”会三角形全等的直接条件、间接条件以及如何将间接条件转化为直接条件

所谓三角形全等的直接条件就是：给出的已知条件正好是两三角形对应边或对应角相等，直接用来证明三角形全等就可以了. 而间接条件是指：给出的已知条件不是两三角形对应边或对应角相等，而是要通过一步、两步或多步推理，转而得到两三角形对应边相等或对应角相等的条件. 间接条件可通过推理转化为证明两三角形全等的直接条件. 通过下面例题来区分直接条件与间接条件.

例2 如图，$\angle A=\angle B$，$\angle 1=\angle 2$，$EA=EB$.



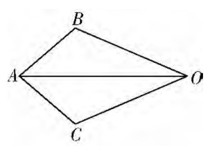
证明：$\triangle EAC \cong \triangle EBD$.

其中$\angle A=\angle B$，$EA=EB$就是要证两三角形的对应角和对应边，所以是直接条件；而$\angle 1$，$\angle 2$并不是$\triangle EAC$和$\triangle EBD$的内角，所以$\angle 1=\angle 2$不是直接条件，而是间接条件，但可以通过一步简单推理：因为$\angle 1=\angle 2$，所以$\angle 1+\angle BEC=\angle 2+\angle BEC$，所以$\angle AEC=\angle BED$. 将$\angle 1=\angle 2$这个间接条件转化为直接条件$\angle AEC=\angle BED$.

在间接条件中，可将间接条件分为简单间接条件和复杂间接条件. 所谓简单间接条件就是跟直接条件联系紧密，往往可通过一步或两步简单推理就能转化为直接条件. 在证三角形全等中，常见的简单间接条件主要有以下几种：

1. 角平分线，角平分线这一间接条件可推导出一对对应角相等

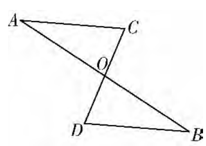
例3 已知：如图，OA平分$\angle BOC$，$OB=OC$. 求证：$AB=AC$.



分析 因为OA平分$\angle BOC$，所以$\angle BOA=\angle COA$，将角平分线这一间接条件转化为证明三角形全等的直接条件.

2. 中点(中线)

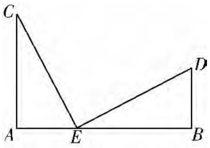
例4 如图，O是AB的中点，$\angle A=\angle B$，$\triangle AOC$与$\triangle BOD$全等吗？为什么？



分析 因为O是AB的中点，所以$OA=OB$，将O是AB的中点这一间接条件转化为证明三

角形全等的直接条件.

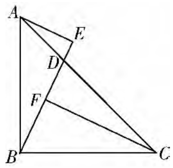
3. 垂　直



例5　如图，$AC \perp AB$，$BD \perp AB$，$CE \perp DE$，$CE = DE$. 求证：$AC + BD = AB$.

分析　$AC \perp AB$，$BD \perp AB$，可以轻松推导出$\angle A = \angle B$. 将垂直这一间接条件转化为证明三角形全等的直接条件.

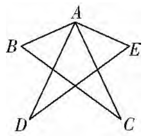
4. 同角或等角的余角(补角)相等



例6　如图，$\angle ABC = 90°$，$AB = BC$，D为AC上一点，分别过A，C作BD的垂线，垂足分别为E，F. 求证：$EF + AE = CF$.

分析　本题的关键是利用同角的余角相等，因为$\angle ABC = 90°$，$CF \perp BD$，所以$\angle ABE + \angle CBE = 90°$，$\angle BCF + \angle CBE = 90°$，所以$\angle ABE = \angle BCF$. 同角或等角的余角(补角)相等这一间接条件需要我们去发现，并能熟练的将其转化为证明三角形全等的直接条件.

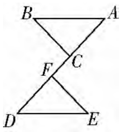
5. 共一部分角



例7　如图，已知$\angle BAD = \angle EAC$，$AB = AE$，$AC = AD$，求证：$\triangle ABC \cong \triangle ADE$.

分析　$\angle BAD$和$\angle EAC$并不是$\triangle ABC$和$\triangle ADE$的内角，所以不能直接用来证明三角形全等，但仔细观察一下，$\angle DAC$是两三角形内角$\angle BAC$和$\angle DAE$的公共部分，分别将$\angle BAD$和$\angle EAC$加上$\angle DAC$正好转化为两三角形的内角. 因为$\angle BAD = \angle EAC$，所以$\angle BAD + \angle DAC = \angle EAC + \angle DAC$，即：$\angle BAC = \angle DAE$. 共一部分角这一间接条件转化为直接条件是每名同学必须学会的，解题时常常会遇到.

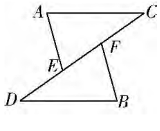
6. 共一部分边



例8　如图，点C，F在AD上，且$AF = DC$，$\angle B = \angle E$，$\angle A = \angle D$，你能证明$AB = DE$吗?

分析　已知条件中AF与DC显然不是$\triangle ABC$与$\triangle DEF$的边，所以$AF = DC$是间接条件，不能直接运用，观察不难发现FC是线段AF与DC的公共部分，分别将AF和DC减去FC就能得到直接条件$AC = DF$. 共一部分边这一间接条件转化为直接条件也是每名同学必须学会的，解题时常常会遇到.

7. 两线平行



例9　已知：如图，点E，F在CD上，且$CE = DF$，$AE = BF$，$AE /\!/ BF$.

①求证：$\triangle AEC \cong \triangle BFD$;

②你还能证得其他新的结论吗?

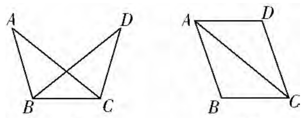
分析　$AE /\!/ BF$跟三角形全等并没有直接关系，所以是间接条件，因为$AE /\!/ BF$，所以$\angle AEC = \angle BFD$，很快将平行转化为了对应角相等. 两直线平行的三个性质中"两直线平行，内错角相等"和"两直线平行，同位角相等"用得比较多，而"两直线平行，同旁内角互补"在三角形全等中用得比较少.

复杂间接条件指的是与要证的全等三角形没有直接联系，而与其他全等三角形有关，通过证明其他三角形全等，再依据全等三角形的性质来转化为要证的全等三角形对应边或对应角相等.

策略三　"做"好三角形全等的基本图形的研究与隐含条件挖掘

由于全等三角形都是通过平移、翻折或旋转变换而得到的，知道全等三角形的变换过程和基本图形，对我们解题是大有裨益的. 尤其要让学生理解基本图形(图形很多，有代表性的为基本图形)中隐含的条件. 这些隐含条件往往是解题的关键所在.

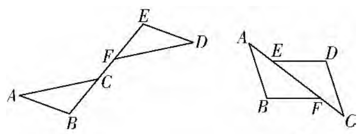
1. 共边型全等三角形



(1)　　(2)

共边型全等三角形有两个基本图形，如图(1)、图(2)，图(1)是将$\triangle ABC$左右翻折而得到，两三角形在公共边BC的同一侧，图(2)是将$\triangle ABC$旋转后再平移而得到，两三角形在公共边AC的两侧，无论是图(1)还是图(2)，共边型全等三角形隐含的条件是公共边相等. 即图(1)中$BC = BC$，图(2)中$AC = AC$.

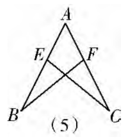
2. 共一部分边型全等三角形



(3)　　(4)

共一部分边型全等三角形主要也是两个基本图形，图(3)是分离型，给出的已知条件往往是$CE = FB$，我们一定要快速推导出$EF = BC$；图(4)是重叠型，给出的已知条件往往是$AE = CF$，我们也要快速推导出$AF = CE$. 这些隐含条件往往是解题的关键所在.

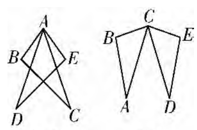
3. 共角型全等三角形



(5)

如图(5)就是共角型全等三角形的基本图形，$\triangle AEC$可由$\triangle AFB$翻折得到，共角型全等三角形隐含的条件是$\angle A = \angle A$.

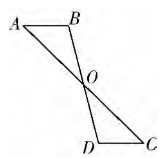
4. 共一部分角型全等三角形



(6)　　(7)

共一部分角型全等三角形主要也有两个基本图形，部分重叠型(如图(6))和分离型(如图(7))，在图(6)中，有两种给已知条件的方式，一是已知$\angle BAD = \angle EAC$，我们要快速推出$\angle BAC = \angle EAD$；二是反过来已知$\angle BAC = \angle EAD$，我们也能快速推出$\angle BAD = \angle EAC$. 对于图(7)我们也有类似的结论.

5. 对顶角型全等三角形



对顶角型全等三角形是比较简单的，隐含的条件就是对顶角相等，即$\angle AOB = \angle COD$.

总之，要想让学生学好吃透全等三角形，教师一定要把握好以上三个教学策略，全等三角形所有知识和题型都是在以上的基础上发展或延伸的，从而真正实现"教、学、做合一"的教育思想.