# 利用GeoGebra研究试题的几个切入点

311200 浙江省杭州市萧山区第十一高级中学 沈灿江

研究试题是教师的常规工作，它对精选例题、习题、考题有用，对抑制题海战术有利，对提高教学效率有益. 研究试题一般可以从试题的立意、试题的背景、试题的解法、试题的推广、试题的命制思路、试题命制中的瑕疵等几个方面入手. 有些试题的图形比较复杂，有些试题仅画草图则研究不够精确，特别是一些动态问题，画草图很难体现其动态的过程，所以在平时的教学工作中，笔者常常借用GeoGebra来研究试题.

GeoGebra(Geometry+Algebra)是2002年由美国佛罗里达州大学的Markus Hohenwarter教授所设计的一款结合几何、代数和微积分的免费动态数学软件，迄今为止，已获得十一项国际荣誉，包括欧洲和德国的教育软件奖项. 与几何画板、超级画板等软件相比，GeoGebra的特点主要有以下几点：(1)功能强大，集几何作图、代数运算和数据处理于一体，适用于大中小学数学的教与学，可避免多个软件相互切换；(2)易于交流和学习，特有的“作图过程”与“作图过程导航条”可再现课件的制作过程，真正做到“所见即所得”；(3)免费软件，资源共享，基于Java程序编写，便于远程交流和网上学习.

本文以笔者自身实践为基础，以试题的命制思想、试题的命制背景、试题的命制瑕疵为切入点，介绍GeoGebra在试题研究中的应用.

## 一、研究试题的命制思路

案例1[1] 已知定义在实数集$\mathbf{R}$上的偶函数$f(x)$的最小值为3，且当$x\geqslant 0$时，$f(x)=3\mathrm{e}^x+a$，其中e为自然对数的底数.

(1)求函数$f(x)$的解析式；

(2)求最大的整数$m(m>1)$，使得存在$t\in\mathbf{R}$，只要$x\in[1,m]$，就有$f(x+t)\leqslant 3\mathrm{e}x$.

本题设计巧妙，很好地对2002年全国高中数学竞赛一试的压卷题进行了改编，但是学生感觉第(2)小题很难入手，甚至连读懂题意都有困难，所以笔者尝试利用GeoGebra对试题的命题思路进行了探究.

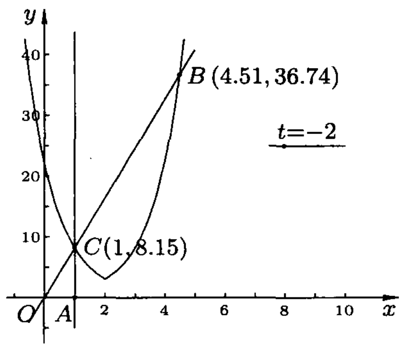


图1

从第(1)小题求得$f(x)=3\mathrm{e}^{|x|}$，利用软件的“滑杆”工具新建参数$t$，然后在“命令框”中输入“$g(x)=3\mathrm{e}x$”，“$h(x)=3\mathrm{e}\wedge(\mathrm{abs}(x+t))$”，按ENTER键生成函数图像. 拖动“滑杆”改变参数$t$的值，如图1所示，发现当$t=-2$时，$g(x)=3\mathrm{e}x$和$h(x)=3\mathrm{e}^{|x+t|}$的其中一个交点横坐标恰好为$x=1$，而此时另一个交点的横坐标为$x=4.51$，即存在$t=-2$，只要$x\in[1,4.51]$，$3\mathrm{e}^{|x+t|}\leqslant 3\mathrm{e}x$恒成立，所以$m=4.51$满足题意，当$m>4.51$时，无论$h(x)=3\mathrm{e}^{|x+t|}$左移还是右移(参数$t$的改变)，均存在$x\in[1,m]$，使$3\mathrm{e}^{|x+t|}>3\mathrm{e}x$，所以此时不存在$t$满足题意，所以$m\leqslant 4.51$，但是如果没有计算器，要求出$m=4.51$是不可能

---

角互补.

实质上上述结论类似于圆中的“圆幂定理及其逆定理”. 因此在以上背景研究的基础上，我们对高考考题有了一个更深入的认识，并且我们还可以类似地去研究双曲线、抛物线的情形.

**参考文献**

[1]郑观宝. 一道课本习题的探究、推广与应用[J]. 数学教学, 2011(1): 26-28.

的，所以命题者又巧妙地将问题设置为求整数$m$的最大值，在降低题目难度的同时，又考查了导数的应用和函数零点存在定理.

将上述探究过程翻译成代数语言，就是命题者所给出的参考答案. 这样的探究使学生更容易明白为什么一开始要用特殊值$f(1+t)\leqslant 3e$求出$-2\leqslant t\leqslant 0$，然后再用能成立问题的解题思路求得$e^{-2}\leqslant\dfrac{em}{e^m}$，为了求出满足上述不等式的最大整数$m$，要构造函数，用导数和零点存在定理解决. 所以探究试题的命题思路，不仅可以让学生更加深刻地理解题目的本质，提高试题讲评的效率，还可以进一步提高教师的解题能力和命题水平.

**二、研究试题的命制背景**

案例2 (2007年全国高考陕西卷理科第21题) 已知椭圆$C$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，短轴一个端点到右焦点的距离为$\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆$C$的方程.

(2) 设直线$l$与椭圆$C$交于$A$、$B$两点，坐标原点$O$到直线$l$的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求$\triangle AOB$面积的最大值.

本题(1)求得椭圆$C$的方程为$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$. 本题(2)的参考答案利用联立方程、韦达定理、基本不等式求得$|AB|_{\max}=2$，即$S_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.87$，但是计算过于复杂，考虑到本题是一道动态最值问题，要想简化方法，必须找到运动过程中不变的因素，所以笔者用GeoGebra对其进行了探索.

首先在“命令框”中输入“$x^2/3+y^2=1$”和“$x^2+y^2=3/4$”，得到相应的椭圆和圆的方程，然后在圆$O$上任取一点$P$，利用“切线”工具过点$P$作圆$O$的切线$l$(因为圆$O$的半径为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以原点$O$到切线$l$的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以切线$l$就是题目条件所给的直线$l$)，再利用“交点”工具作出切线$l$与椭圆的两个交点$A$、$B$，然后利用“多边形”工具构造$\triangle AOB$，并用“测量面积”工具测其面积为Area $AOB$，最后利用“测量角度”工具测得$\angle AOB$的大小，如图2所示.

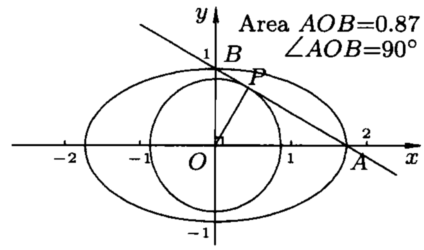


图2

拖动点$P$，我们可以看到，$\triangle AOB$的面积Area $AOB$在连续的变化，但是$\angle AOB$的大小却始终等于90°，这就是运动变化中的不变量，也是本题命题的背景：对定点张直角的二次曲线弦问题. 有了对上述背景的本质认识，本题的解题思路也随之打开，$S_{\triangle AOB}$可以不依赖于弦$|AB|$而求得，如$S=\dfrac{1}{2}\times|OA|\times|OB|$，把点坐标代入即可得$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$，那么由柯西不等式可以一步得出结果：

$$\begin{aligned}S_{\triangle AOB}&=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{x_1}{\sqrt{3}}\cdot y_2-\frac{x_2}{\sqrt{3}}\cdot y_1\right|\\&\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{3}+y_1^2\right)\left(\frac{x_2^2}{3}+y_2^2\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

也可以将椭圆参数方程代入$S_{\triangle AOB}$，得$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}|\sin(\alpha-\beta)|\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 而且本题的改编也就非常顺其自然了，比如在GeoGebra中增大圆的半径，可以发现$\angle AOB$都是锐角，减小圆的半径，$\angle AOB$都是钝角，所以当$\angle AOB$为直角时，圆的半径应该满足一定的条件，所以可以命制下面的试题：

改编：已知椭圆$C$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，短轴一个端点到右焦点的距离为$\sqrt{3}$，坐标原点为$O$.

(1) 求椭圆$C$的方程.

(2) 设直线$l$与椭圆$C$交于$A$、$B$两点，若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，求$O$到直线$l$的距离.

更进一步，可以将$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$换成$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{4}$等，当然也可以从$\triangle AOB$的面积、弦$AB$的长度，直线$AB$的方程等入手改编试题.

**三、研究试题的命制瑕疵**

案例3[2] 从双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>$

0)的左焦点$F_1$引圆$x^2+y^2=a^2$的切线$l$, 切点为$T$, 且$l$交双曲线的右支于点$P$, 若点$M$是线段$F_1P$的中点, $O$为坐标原点, 则$|OM|-|TM|=$ ______.

参考答案运用了平面解析几何知识与双曲线的定义, 很巧妙地解决了本题, 得到答案为$b-a$, 但是仔细分析参考答案, 发现其中非常关键的一步$|MF_1|=|MT|+|TF_1|$需要点$T$落在点$M$与点$F_1$之间, 但是参考答案却没有说明, 这引起了笔者探索的兴趣.

在GeoGebra中利用“滑竿”工具建立两个参数$a$和$b$, 然后在命令框中输入“$x^2+y^2=a^2$”和“$x^2/a^2-y^2/b^2=1$”, 得到相应的圆和双曲线图像, 再输入“$F_1=(-\mathrm{sqrt}(a^2+b^2),0)$”得到双曲线的左焦点$F_1$, 利用“切线”工具过点$F_1$作圆的切线$l$, 切点为点$T$, 用“交点”工具作$l$与双曲线右支的交点为点$P$, 再利用“中点”工具构造$F_1P$中点为$M$, 如图3、图4、图5所示.

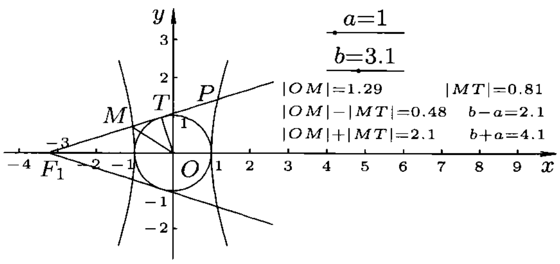


图3

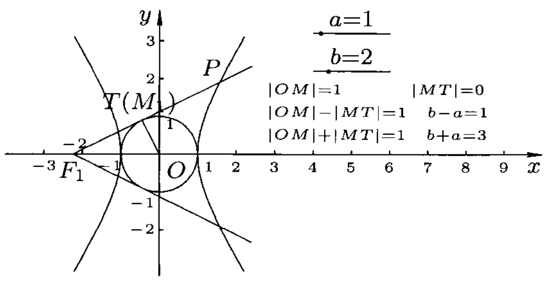


图4

固定参数$a=1$, 拖动参数$b$, 可以发现如下结论: 当$b>2a$时(如图3), 点$T$落在点$M$与点$P$之间, 此时$|OM|-|TM|$不是定值, 但$|OM|+|TM|$恒为定值$b-a$; 当$b=2a$时(如图4), 点$T$与点$M$重合, 此时$|OM|=b-a$, 当$b<2a$(如图5), 点$T$才落在点$M$与点$F_1$之间, 此时$|OM|-|TM|$恒等于$b-a$.

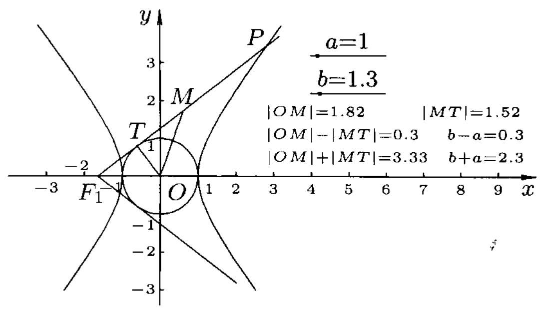


图5

通过GeoGebra的探究分析, 上述问题答案确实不唯一, 可以通过添加条件$b>2a$来唯一确定答案, 但是考虑到学生在面对条件$b<2a$时很难将之转化为点$T$落在点$M$与点$F_1$之间, 虽然可以用方程思想研究, 但运算量太大, 增加了题目的难度, 所以可以在题目旁边附上图5, 这样用参考答案解答就会非常方便. 所以笔者猜测, 可能是命题者在命题时遗漏了图像.

由上述几个案例可以看出, 利用GeoGebra研究试题确实有其过人之处, 但是, GeoGebra作为工具, 其目的是让我们理解数学问题更简单, 更深刻, 所以在平常使用过程中, 一定要提炼现象背后的本质, 让GeoGebra真正为我们研究试题所用.

**参考文献**

[1] 李平龙. 我为高考设计题目[J]. 数学通讯, 2009(12): 40.

[2] 张网军, 丁爱年. 一道错题的剖析与探究[J]. 中学数学教学参考, 2011(3): 44.

(上接第3-16页)

何妨?

这些问题都是学生在学习“课内”知识过程中产生的“课外”问题, 其思维方式完全不同于我们老师编制的那些“无病呻吟”的延伸拓展题, 新颖、独特、妙不可言. 难怪爱因斯坦说“提出一个问题往往比解决一个问题更重要”. 我们老师如果不鼓励学生质疑, 搭建让学生质疑的平台, 或许, 我们根本无法了解我们的孩子有多聪明, 尽管他们在数学学习中显现出来的智商可能很平常, 但蕴含的创造力与想象力远远超出成人, 而未来社会最需要的就是创新精神和创造能力. 怎样保持和发展学生的想象力和创造力, 是我们教育者应该进一步思考和研究的问题.