

Geogebra 软件在高中数学教学中的应用

金 贤 (苏州大学数学科学学院 2008 级研究生 215006)

Geogebra(Geometry + Algebra)是 2002 年由美国佛罗里达州亚特兰大的 Markus Hohenwarter 教授所设计的一款结合几何、代数和微积分的免费动态数学软件. 迄今为止, 已获得十一项国际荣誉, 包括欧洲和德国的教育软件奖项, 软件有三十多种语言(包括中文)可选. 本文介绍该软件的主要功能以及在高中数学教学中的应用.

1 GeoGebra 的功能及特点

GeoGebra 是一款动态几何软件, 可以画点、线、向量、多边形、曲线等; 同时又可以处理方程、函数等代数问题. 打开这个软件, 可以看到三个工作区(图 1), 从左到右依次为代数工作区(类似于超级画板)、几何工作区(类似于几何画板)、表格工作区(类似于 Excel, 此工作区通常处于隐藏状态). 它是直接基于 Java 程序编写, 因而动态网页输出效果非常好, 便于技术的交流和资源的共享.



图 1

与几何画板、Excel、超级画板等软件相比, Geogebra 的特点主要有以下三点:

(1) 功能强大. 集几何作图、代数运算和数据处理于一体, 适用于大中小学数学的教与学, 可避免多个软件相互切换.

(2) 易于交流和学习. 特有的“作图过程”与“作图过程导航条”可再现教案的制作过程, 真正做到“所见即所得”.

(3) 免费软件, 资源共享. 基于 Java 程序编写, 便于远程交流和网上学习.

2 示例

Geogebra 可作直线与曲线的交点, 用其来进行几何图形的探索, 非常轻松; Geogebra 代数功

能强大, 可进行数的精确运算(如 $a = 3^{33}$), 因式分解(如 $x^4 - x^2 - 12$), 求导(如 $(\frac{\ln x}{\sin x})'$), 求函数表达式(已知 $g(x) = x^2 + 3x - 1$, 求 $g(x+1)$ 的表

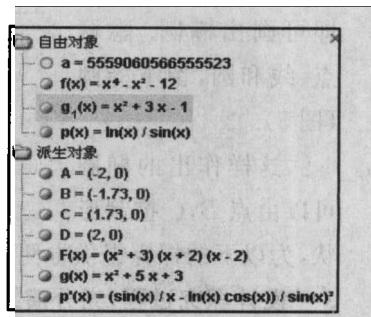


图 2

达式, 输入 $\text{simplify}[g(x+1)]$, 求多项式方程的根(如求方程 $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ 的根, 输入 $\text{Root}[x^4 - 7x^2 + 12]$, 结果返回图象与 x 轴的四个交点 A, B, C, D), 如图 2.

例 1 已知 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 验证 $f(f(f(x))) = x$.

步骤 在输入框内键入 $f(x) = 1 - 1/x$ (也可直接输入 $1 - 1/x$, 系统默认函数名为 $f(x)$), 按回车; 接着在输入框中输入 $f(f(f(x)))$, 按回车; 最后输入 $\text{simplify}[g(x)]$.

说明 Geogebra 将图形和表达式紧密联系在一起, 在输入框中键入函数表达式后, 就能在几何工作区中显示函数的图象; 在几何工作区中作图, 在代数工作区即可显示相应的表达式. 执行 $f(f(f(x)))$ 命令后, 在代数工作区出现的表达式是未经过化简的, 要键入化简函数 simplify 进行化简(图 3).

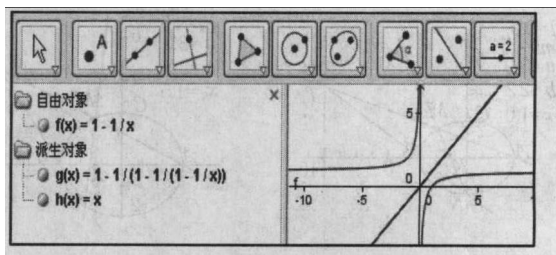


图 3

例 2 连结椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上一点 P 与椭圆焦点 F_1, F_2 的直线分别交椭圆于 A, B 两点, 探索 $S_{\triangle PAB}$ 的最大值(图 4).

分析 这是文[1]中的一个问题. 当时几何

画板软件可以解决两直线、两圆或直线与圆的交点问题,但直线和圆锥曲线的交点只有用计算的方法而无法通过“交点”命令直接作出(目前的几何画板已有此功能).Geogebra能方便地解决这一问题.

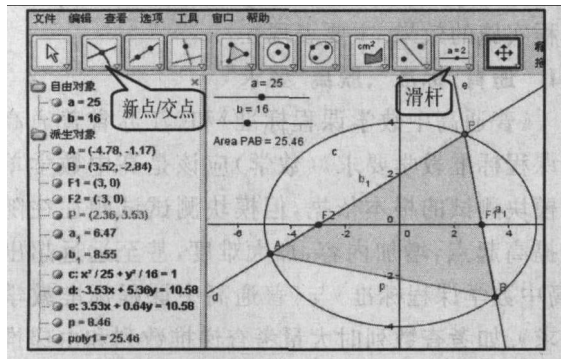


图 4

具体步骤 (1) 在输入框中,输入椭圆方程“ $x^2/25 + y^2/16 = 1$ ”.

(2) 选择“新点”按钮,在坐标轴的(-3, 0)和(3, 0)处建立新点(焦点 F_1, F_2),然后在椭圆上任取一点 P .(注:双击新建的点,在弹出的对话框中选择“属性”,修改点的名称)

(3) 选择“直线”按钮,作出直线 PF_1, PF_2 .再选择“交点”按钮,鼠标移至 PF_1, PF_2 与椭圆的交点处,作出交点 A, B (图 4).

(4) 选择“多边形”按钮,依次单击 $P-A-B-P$,此时在代数工作区中出现的“poly1”后的数据就是三角形的面积.(也可选择“测量面积”命令,测量三角形面积)

(5) 拖动点 P ,观察可知当 P 为上(下)顶点时,三角形的面积最大,最大值为 25.95.

小结 利用 Geogebra 可探索本例的一般情况,即当椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1(a > b > 0)$ 时,是否仍有点 P 位于上(下)顶点时,三角形的面积最大?可以建立变量尺 a, b ;单击滑杆按钮,建立 a, b 两个变量尺,双击变量尺,在“基本”选项中修改名称,在“滑杆”选项中修改区间的最小值和最大值.焦点 F_1, F_2 不能直接通过“新点”按钮来建立,应在输入框中分两次输入“ $F1 = (\text{sqrt}(a - b), 0)$ ”,“ $F2 = (-\text{sqrt}(a - b), 0)$ ”(如果滑杆中的数据 $a < b$,那么代数区中 F_1, F_2 会出现未定义的提示).经探索发现,该结论仍然成立,接着可尝试进行理论证明.

例 3 计算抛掷一枚硬币,正面向上的概率.

分析 算法的主要思想是生成随机数,统计

满足要求的数据的个数.

步骤 一种是类似于 Excel,在表格工作区(单击“查看”,选择“电子表格”)“A1”中输入“random()”(该命令生成 0 ~ 1 内的随机数),拉动至适当位置,如“A200”,在空白单元格内,如“B1”内输入“countif[$x < 0.5, A1: A200$]/200”即可,可按“Ctrl + r”刷新数据.该方法生成数据的过程较慢,拖动不方便.另一种是通过命令生成随机数.具体过程如下:首先建立一个“ n ”的滑杆,修改其名称后,设置区间为 1 ~ 5 000,增量为 1,其次在下方输入框中输入“Sequence[random(), $i, 1, n$ 】”(生成 n 个 0 ~ 1 的随机数),最后输入“countif[$x < 0.5, \text{list1}$] / n ”(统计生成的数据中小于 0.5 的数的个数并除以数据总数).图 5 是 $n = 1\ 000$ 的情形.

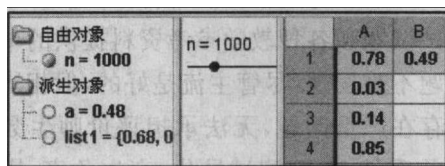


图 5

说明 用 Geogebra 编写该题的算法和步骤并不难,但是模拟次数不能太高,否则运算速度就会很慢.

例 4 按如下要求解方程组 $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ x + 2y = -3. \end{cases}$

(1)用行列式求解;(2)用逆矩阵求解.

分析 用行列式求解二元一次方程组,就是求相应的系数矩阵,而运用逆矩阵解方程组,关键是求其逆矩阵.

步骤

(1)在输入框中依次输入三个矩阵 $\{\{3, -1\}, \{1, 2\}\}, \{\{5, -1\}, \{-3, 2\}\}, \{\{3, 5\}, \{1, -3\}\}$ (在代数工作区分别得到 matrix1, 2, 3).

接着输入 Determinant[matrix1], Determinant[matrix2], Determinant[matrix3],求

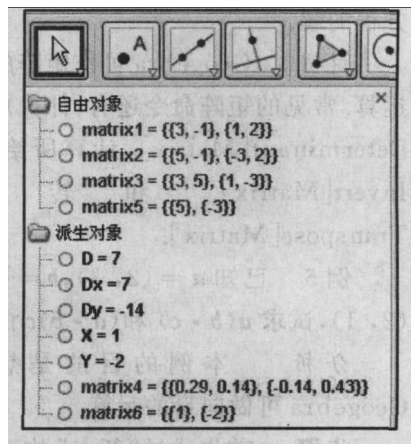


图 6

关于数学模块测试评价的思考

王成杰 刘新春 (江苏省扬中高级中学 212200)

1 问题提出

谈到每年的数学高考,广大考生和高三数学教师往往体会很深,刻骨铭心.其实高考的激烈竞争已经下移到高一、高二年级的单元模块测试中,不少学校将数学单元、模块检测成绩作为考核数学教师教学水平和工作绩效的唯一依据,学生将单元模块测试成绩作为自己数学学习效果的最终评价,甚至成为学习数学的目标.因而平时的单元模块测试成了教师教学的“指挥棒”和学生学习的“紧箍咒”.但稍加分析研究目前高一、高二年级的模块测试试题和各种教学参考资料提供的单元模块测试题不难发现,尽管主流是好的,但相当一部分试题存在严重问题,无法承担评价师生数学教学效果的重任,甚至测试异化,产生危害,影响新

课程实施的效果.主要表现在:

1.1 违背“标准”,脱离“要求”

《普通高中数学课程标准》和《江苏省普通高中课程标准教学要求》(数学)应该是高中数学单元模块测试的根本依据,但模块测试试题往往随意提高起点,增加内容,加大难度,甚至远远超出《高中数学课程标准》与《普通高中课程标准教学要求》.如考查数列时大量考查递推数列和由递推数列转化为等差(等比)数列的特殊技巧,而不是立足于考查等差(等比)数列的基本性质;考查不等式证明不是考查比较法等通法,而是大量考查放缩法等需要辅以各种技巧的证明方法;考查集合的基本运算时将高难度含参数的不等式求解与求参数范围的试题作为集合考题;考查函数性质

出相应的系数行列式;最后输入 $X = Dx/D, Y = Dy/D$,得到方程组的解(图6).

(2) 在输入框中输入 $\text{Invert}[\text{matrix1}]$, 求出D的逆矩阵(在代数工作区得到 matrix4);接着输入 $\{\{5\}, \{-3\}\}$ (在代数工作区得到 matrix5);最后输入 $\text{matrix4} * \text{matrix5}$,得到 matrix6 即为原方程的解.

说明 Geogebra 可作矩阵的加减以及乘法运算.常见的矩阵命令还有:计算矩阵的行列式值 $\text{Determinant}[\text{Matrix}]$, 计算所给矩阵的逆矩阵 $\text{Invert}[\text{Matrix}]$ 和转置矩阵 $\text{Transpose}[\text{Matrix}]$.

例5 已知 $a = (2, 3), b = (-1, -2), c = (2, 1)$, 试求 $a(b \cdot c)$ 和 $(a \cdot b)c$ 的值.

分析 本例的目的是想让读者了解 Geogebra 可做向量的运算.

步骤 首先通过“新点”构造3个新点, $A = (2, 3), B = (-1, -2), C = (2, 1), O = (0, 0)$;然后在输入框中分三次输入: $\text{Vector}[O, A], \text{Vector}[O, B], \text{Vector}[O, C]$, 构造向量 a, b, c , 最后在输入框中输入 $a(b \cdot c)$ 和 $(a \cdot b)c$, 算出答案(用空格表示数量积)(图7).

小结 Geogebra 可求曲率向量、方向向量、

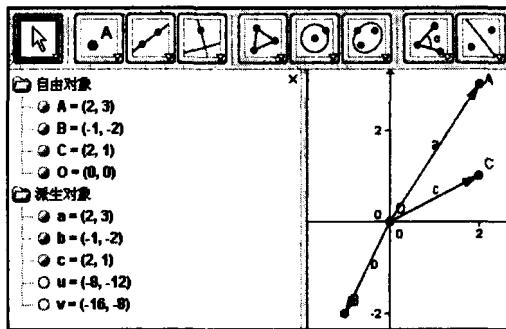


图7

法向量、单位向量等.

3 结束语

运用 Geogebra 于中学数学教学,还有很多案例,限于篇幅,这里不再举例了,读者可从网上 (www.geogebra.org) 获得更多信息和资源.当然,这款软件如能多增加一些快捷键(如图象、文本的显示或隐藏),增加填充功能,增加画自由曲线的功能(即画笔功能),加强数据处理的功能(目前只能做简单的数据处理以及建立线性拟合函数),就更完美了.

参考文献

[1] 徐稼红. 运用“几何画板”求曲线的交点[J]. 中国电化教育, 2000(8).